土の不均一性を考慮した透水モデル

仲沢武志

概 要

地盤や地下水中を拡散する物質の挙動を把握するには、物質移行拡散解析が実施される。このとき、移流項にお ける流速には実流速が用いられることがある。よって、地盤や地下水中を拡散する物質の挙動を把握するためには、 その特性を表わす分散係数だけでなく実流速も重要な役割を果たす。現状、この実流速には通常のダルシー流速を 間隙率で除した値が用いられている。この手法は、標準砂のような比較的均一な組成からなる地盤には有効であるも のと考えられる。しかし、本来地盤は複雑な構造を有していることや、現状の実流速の計算手法が、その前提に等方 性が前提とされていること等、その評価には若干の問題も含まれているものと考えられる。

本文では、本来地盤が有している複雑な構造や異方性をも考慮できるよう自然な形で実流速の概念を拡張する計 算手法について考える。

Permeability Model for Soils with Inhomogeneities

Abstract

Transportation analysis is performed to predict the behavior of contaminants in soil and/or ground water. The concept of "real velocity" is used in such calculations. Thus, it is important to evaluate the concept of "real velocity" as well as the dispersion modulus when we calculate the contaminant behavior in soil and/or ground water. Usually, real velocity is calculated by dividing the Darcy velocity by the volume ratio of inclusions. This procedure is followed in some cases, such as standard Toyoura sand but without consideration of microstructure and/or anisotropy in ground properties.

In this study we consider the natural expansion process of real velocity concept, allowing for the effect of microstructure and anisotropy on permeability.

キーワード:微視構造,実流速,透水, 平均化,介在物,等価介在物法

§1. はじめに

材料の内部に存在する構造(微視構造)を考慮してマ クロに平均化した特性を把握する研究分野が, 微視力学 (マイクロメカニクス)として発展している¹⁾。材料力学的な 分野では, 2相系材料の平均的な弾性係数の上・下界値 を評価し²⁾, それらを統一的な見解から予測する研究があ る³⁾。

また,材料内の構造を構成する介在物の形も積極的に 考慮した力学モデルが提案され 4,その計算手法を用い た平均化手法も提案されている 5,さらに,この手法を用 いて弾性的な特性だけでなく塑性状態への評価にも応 用された研究も進められている 6。

一方,地盤は,種々の組成を持った土質で構成されて いることは周知であるが,粒状体力学のアプローチ ¬以外 にも,こうした微視構造を考慮した構成モデルを提案した 例もある ⁸。特に,地盤の透水特性を考えた場合,亀裂性 岩盤を対象とした研究 のがあるが,二重間隙モデル ¹⁰や 実流速という概念以外に微視構造を反映させた透水モデ ルの研究は少ないものと思われる。

近年,環境問題が社会的に注目されている中,地盤や 地下水の汚染問題も重要な課題として位置付けられる。

ところで,地盤や地下水の汚染問題を予測解析する場合,一般的には次のような手続きで実施される。すなわち, 最初に浸透流解析を実施し,そこで得られるダルシー流 速を実流速に変換する。その上で,汚染物質自体の挙動 を把握するために物質移行拡散解析の移流項に実流速 を代入し,時系列に計算を進めることで拡散物質の挙動 を把握する。

ここで,一般に実流速は浸透流解析で得られるダル シー流速を間隙率で割ることによって算出されている。こ の計算はある意味で力学挙動に微視構造を反映したもの と考えられる。しかしながら,その物理的な意味や適用範 囲,理論的な位置付けは必ずしも明快に示されていない のが現状であるものと思われる。例えば,その計算手法か らわかるように,従来の実流速が透水特性において等方 性を前提としている等の簡素化を含んでいる。

そこで本文では、従来複合材料の平均的な性質を評価するために用いられていた等価介在物法 4と森・田中の平均化手法 5を組み合わせた手法を透水問題に適用し、従来から用いられている実流速の一般的な解釈を試みる。さらに、損傷力学での実質応力の概念を透水問題へ適用することで、実流速に異方性を自然な形で組み込む計算手法に対しても若干の考察を行なう。なお、本文においては飽和状態について考えることとする。

§2. 本研究の背景

地盤や地下水中に広がる拡散物質の挙動を予測する には、次の3つのステップが実施される。

1) 浸透流解析によってダルシー流速を求める

2)計算されたダルシー流速を実流速に変換する

3) 計算された実流速を物質移行拡散方程式の移流

項に代入して各節点の物質濃度を計算する

このうち、ダルシー流速を実流速に変換する際にはダル シー流速を間隙率で除することで実流速が計算されてい る。この計算は、標準砂のように比較的間隙を明確に区 分けできる場合には有効である場合もあるが、土要素が 複雑に構成されるようなときや、介在物の形状を考慮すべ き場合に、この手段が十分適切な手段かどうかは疑問で あると考えられる。そこで、本文では土要素の微視構造を 反映した透水モデルについて考える。

具体的には,土要素の構成を母材と介在物に区分けし, 介在物の影響を等価介在物法で表わし,要素全体での 平均化に森・田中理論を用いる。

これにより,従来からの実流速の概念を一般化し,適用 範囲を広げることが可能であることを示す。

§3. 等価介在物法の透水問題への適用

材料の構成則を考える場合,対象としている物理量が 何階のテンソルであるかをまず把握する必要がある。等価 介在物法は従来複合材料の力学的な側面について考え られているため,扱う物理量は応力やひずみとなり,これ らは2階のテンソルとなる。このとき,構成則は4解のテン ソルとなる。

一方,透水問題において扱う物理量は流速とヘッド差 であり,これらは1階のテンソルすなわちベクトルである。 よって,構成則は2階のテンソルとなる。この対応を図1に 示す。この点に注意しながら議論を進めることとし,以下 に理論の定式化を示す。

複合材料内部の微視構造を構成する介在物の形が回 転体で近似できるとき、その影響を等価介在物法で表わ すことができる。よって、本文ではこの前提を採用し、複合 材料における介在物の影響を等価介在物法で表わし、 介在物が多数内在する平均的な性質を森・田中理論で 計算する。なお、本文の定式化では簡単のため2相系材

応力 σ_{ij} \leftrightarrow 流速 v_i ひずみ ε_{ij} \leftrightarrow ヘッド差 剛性 C_{ijkl} \leftrightarrow 透水性 k_{ij}

図1 物理量の対応

料の場合について記述するが,多相系材料への拡張は 自然な形で展開できる。

透水問題における等価介在物法の基本的な考え方は, 「複数の相からなる複合材料内の介在物の影響を母材の 物性値と固有ヘッド(差)で表す」というものである。

3.1 2相系地盤でのダルシー則

2相系地盤における各相のダルシー則は以下のように 記述される。

 $v_M = -k_M F_M \qquad (\oplus \forall) \tag{1}$

 $v_I = -k_I F_I$ (介在物) (2) ここに、添字のMは母材を、Iは介在物を表わす。なお、 本文においては、F でヘッドの勾配($F \equiv h_{,i}: h \land$ ッド) を表わすものとする。

3.2 森・田中の平均化手法

森・田中の平均化は,介在物の影響を等価介在物法 で表わしたときの手法である。以下にその概要を示す。

介在物を内部に含む物体を考えるとき,各相のダルシー則を式(1)および式(2)で表わす。

介在物が考えている領域内部に均一な状態で多数混入しているとき、母材での平均的なダルシー則が、介在物の存在を考慮した平均的ヘッド勾配 $< G_D >$ を導入して次式で表わせるものとしたのが森・田中理論である。ここに、<・>は平均量を表わすものとする。

 $\langle v_M \rangle = -k_M \langle \zeta_D \rangle \tag{3}$

また,介在物内部での平均的なダルシー則は領域内 で次式のように書くことができるものとする。

$$\langle v_I \rangle = -k_I \langle F_I \rangle \tag{4}$$

さらに、介在物内部の平均的なヘッド勾配を母材のヘッド勾配と介在物自体の乱れ分 F_D の和と考えて次式のように表わす。

$$\langle F_I \rangle = \langle \varsigma_D \rangle + F_D \tag{5}$$

介在物内部の平均的なダルシー則は式(4)と式(5)から 次式のように表わせる。

式(6)の第2等号は、介在物内部の平均的な流速を母 材の透水性で表わすもので、それは固有ヘッド勾配 F^* を導入することで可能となることを示した等価介在物法に 基づいている。さらに、介在物によるヘッド勾配の乱れ分 F_D は Eshelby による解から $F_D = SF^*$ と表わすことが できる。ここにSは Eshelby テンソルと呼ばれる2階のテ ンソルで、母材の物性値と介在物の形から計算されるもの である。式(6)と Eshelby の解から固有ヘッド勾配は次式 のように得られる。

$$F^{*} = [k_{M} - (k_{M} - k_{I})S]^{-1}(k_{M} - k_{I}) < \varsigma_{D} >$$

= -[k_{M} - (k_{M} - k_{I})S]^{-1}(k_{M} - k_{I})k_{M}^{-1} < v^{M} > (7)

一方,介在物を考慮した上での領域全体の平均的な 流速<v>と平均的なヘッド勾配<F>を次式で定義 する。

$$= f < v_I > +(1-f) < v_M >$$

 $= f < F_I > +(1-f) < F_M >$ (8)

ここに, f は介在物の体積比率を表わす。

式(8)第2式と式(5)から領域内部の平均的なヘッド勾 配は次式のように求められる。

$$< F >= f < F_{I} > +(1-f) < F_{D} >=< \zeta_{D} > +fF_{D}$$

$$= -k_{M}^{-1} < v_{M} > +fSF^{*}$$

$$= -[I + fS\{k_{M} - (k_{M} - k_{I})S\}^{-1}(k_{M} - k_{I})]k_{M}^{-1} < v_{M} >$$

(9)

また,式(8)第1式と式(6)から領域内での平均的な流速 は次式のように求められる。

$$=f+(1-f)=-fk_{M}(S-I)F^{*}$$
$$=[I+f(S-I)\{k_{M}-(k_{M}-k_{I})S\}^{-1}(k_{M}-k_{I})]$$
(10)

全体的なダルシー則となる<v >= - < k > < F > と式 (9)および式(10)とから領域全体の透水性である<k > を次式のように計算することができる。

$$=[k_{M} + fk_{M}(S-I)P(k_{M} - k_{I})][I + fSP(k_{M} - k_{I})]^{-1}$$
(11)

ここに、 $P = \{k_M - (k_M - k_I)S\}^{-1}$ とおいた。 式(11)が従来実験で観測される透水係数と解釈できる。

3.3 従来の実流速との関連

ここまで記述した定式化を砂質系地盤の実流速適用 することで,従来から用いられている実流速に関する若干 の考察を行なう。

実験で観測される透水係数は式(11)で与えられることと なるが、この物性値を用いて有限要素法等の数値解析を 実施したとする。そのとき用いられるダルシー則は次式と なる。

<v>= - < k >< F > (12) 式(12)と連続の式から各節点のヘッドおよび平均流速を 計算することができる。なお、ここで得られる平均流速

<v>がいわゆるダルシー流速となる。その求められた 平均流速と式(10)から,母材の流速<v_M>を次式から 求めることができる。

$$=[I+f(S-I)\{k_M-(k_M-k_I)S\}^{-1}(k_M-k_I)]^{-1}$$

(13)

標準砂の様な試料に式(13)を適用した場合, 母材を間隙 とし介在物を土粒子とみなすと, すなわち, $k_I \rightarrow 0$ とおく と, 式(13)による流速は $\langle v_M \rangle = \langle v \rangle / (1 - f)$ となり, これは従来の実流速と一致することとなる。また, このこと は, 式(8)の第1式において $\langle v_I \rangle \rightarrow 0$ と考えても直接得 ることはできる。よって,本文での計算手法は,従来から の概念を包含した上でのひとつの拡張と解釈される。

3.4 従来の実流速の損傷力学 ¹¹的な異方性への拡張

透水試験を実施した際,計測される物理量は基本的に 排水量である。これを供試体の断面積で除することでダル シー流速が求められる。一方,従来の実流速は通水可能な 実質断面積で流量を除することによって計算される。 しかしながら,この段階で土要素の等方性が前提と なっている。一般性を持った形でこれらの関係を表 わすと次式となる。

 $Q = v_i A_i = v_i^* A_i^*$ (14) ここに、Q は流量、 A_i は公称断面積ベクトル、 v_i^* は 実質応力、 A_i^* は通水可能な実質断面積ベクトルをそ れぞれ表わす。損傷力学によれば、公称断面積と実 質断面積の関係が次式で表わされている。

 $A_i^* = (\delta_{ij} - \Omega_{ij})A_j$ (15) ここに、 δ_{ij} はクロネッカーのデルタ、 Ω_{ij} は方向性を持っ た形での介在物の体積比率を表わす2階のテンソルであ り、損傷力学では損傷テンソルとよばれている。これは、 基底ベクトル(座標系)が決まった場合、その基底ベクトル 上において、次式で定義される。

 $\Omega_{ii} = f^{(i)} n_i n_i$ (ただし添え字で総和せず) (16) ここに, n_i は基底ベクトル, $f^{(i)}$ は規定ベクトル方向での 介在物が占める面積比率となる。

以上より、実流速 v_i^* は次式で計算される。

$$v_i^* = (\delta_{ij} - \Omega_{ij})^{-1} v_j \tag{17}$$

等方性を仮定すれば、式(17)は次のように書ける。

$$v_i^* = (1 - \Omega)^{-1} v_i \tag{18}$$

式(18)は従来からの実流速そのものである。したがって, 式(17)は従来からの実流速に異方性を持たせることが可 能なように拡張したものであるが,介在物自体の透水性を 組み込むことができない問題が残る。

§4. 適用例

ここでの透水モデルの適用性を示す。なお、領域内の 巨視的な透水係数に関しては、微視構造の影響を見通し 良く評価できるように、式(11)を次式のように書き直すこと も可能であることも示しておく。

<
$$k_{(ii)} >= k_M + \frac{f(k_I - k_M)k_M}{(k_I - k_M)(1 - f)S_{(ii)} + k_M}$$

(iに関して総和せず) (19)

式(19)の右辺第2項が平均的な透水係数への微視構 造の影響となる。なお,従来から提案されている評価手法 と比較するために,参考として, Voigt モデルや Reuss モ デルの上・下界値を次式に示す。

$$\langle k_V \rangle = fk_I + (1 - f)k_M$$
 (Voigt モデル) (20)

$$\frac{1}{\langle k_R \rangle} = \frac{f}{k_I} + \frac{(1-f)}{k_M} \quad (\text{Reuss } \forall \vec{\mathcal{T}} \mathcal{V}) \quad (21)$$

さらに Hashin と Strikman のモデルも示しておく。

$$< k_1 >= k_M + \frac{f(k_I - k_M)k_M}{k_M + (1 - f)(k_I - k_M)/3}$$

$$< k_2 >= k_I + \frac{(1 - f)(k_M - k_I)k_I}{k_I + f(k_M - k_I)/3}$$
(22)

式(22)は、各々どちらが上・下界値になるかは、 $k_M \ge k_I \ge 0$ 大小関係による。なお、これら3つの評価手法では、介在物の体積比率だけで微視構造を考慮していることにあるが、ここで提案している平均透水係数の評価式(19)では Eshelby テンソルによって介在物の形もある程度は考慮できることとなる。

以下に,これらの手法から求められる平均透水係数や 実流速に対する微視構造の影響を例題に適用することで 定量的に示す。

4.1 母材の透水係数が大きい場合

母材の透水係数が介在物の透水係数より大きい場合 をまず考える。介在物の透水係数をゼロとしたとき、従来 から用いられている実流速の計算、すなわちダルシー流 速を間隙率で除するという手順が適用されるケースである。 しかしながら、ここで示した手法によれば、介在物の体積 比率だけでなく、上述したように、その形状の影響も Eshelby テンソルによって反映することができることとなる。 以下にいくつか例題を示す。





1) 介在物が球形の場合

図2に介在物と考える座標系を示す。ここでは簡単のため、考える座標系と介在物の形状の主軸は一致しているものとするが、この扱いでも何ら一般性は損なわない。

介在物が球形の場合 $(a_1 = a_2 = a_3)$ のとき, Eshelby テンソルは次式のように計算される。

$$S_{11} = S_{22} = S_{33} = \frac{1}{3} \tag{23}$$

なお,そのほかの成分はゼロとなる。

この結果を式(19)に代入すると式(22)の第1式, すなわ ち < k_1 > に一致する。 $k_M > k_I$ の場合に, 平均透水係 数は下界値となるが, このことは材料力学的な考察の場 合と同一の結果となる。この様子を介在物の体積比率と の関係で示したものが図3 である。なお, 同図は平均透 水係数を母材の透水係数で正規化している。また, 各種 の平均化手法から得られる結果を示したものが図4である。 この図から, 本文で考えている平均透水係数式(14)や Hashin等の上下界値は Voigt モデルや Ress モデルの 内側に位置することがわかる。これらの性質もまた, 力学 特性を考慮したものと同様な結果となっている。

(2) 介在物が楕円形状の場合

ここでは、介在物の形状の影響を把握するために、楕円 形状の介在物を考える。なお、簡単のため2次元問題で とする。図 2 において、 $a_3 \rightarrow \infty$ とし、 $x_1 - x_2$ 軸で構成さ れる平面を考える。このとき Eshelby テンソルは次式のよ うになる。

$$S_{11} = \frac{a_1}{a_1 + a_2}$$
 $S_{22} = \frac{a_2}{a_1 + a_2}$ $S_{33} = 0$ (24)

その他の成分がゼロとなるのは、球形の場合と同様である。 この場合の Eshelby テンソルは式(24)であるが、本文で は $a_1 = \alpha a_2$ として扱う。この係数 α を種々変化させて平 均透水係数との関係を示したものが図 5 となる。なお、図 5は x_2 方向の透水係数を示している。

4.2 介在物の透水係数が大きい場合

介在物の透水係数が大きいケースというのは、比較的 大きな空隙を持った多孔質体を想定したものである。多 孔質自体内部に空隙を持つわけであるが、ここでは、大き く2相系でモデル化することを考え、空隙を大小に区分け し、小規模な空隙に関しては多孔質自体の透水性に加 味し、その内部に比較的大きな空隙が存在する場合につ いて考える。なお、ここでは透水性の高い介在物が球形 について示すが、適切な Eshelby テンソルを用いれば任 意の回転体に適用できる。このことは、母材の透水係数 が大きい場合と同様である。





母材と介在物の透水係数の関連を示したものが図6で ある。また、各種平均化との関係を示したものが図7であ る。 $k_M > k_I$ のときここえ示した平均化の式(11)または式 (19)が Hashin 等の下界値を与えるのに対して、 $k_I > k_M$ のときには上界値を与える結果となっている。この結果も また材料力学的な平均化での考察と一致している。

§5. まとめ

地盤・地下水中を拡散する物質の挙動を把握するため には、物質移行拡散解析が実施されるのであるが、その 前段階に移流項の流速を求める必要がある。これには実 流速が用いられているが、その評価手段について微視力 学的考察を行なった。得られた結果を以下に示す。

- 1) 従来の実流速では,介在物の透水係数はゼロであ るという扱いがなされているが,この点を考慮できる よう拡張した。
- 透水性の低い領域に透水性の高い領域が内在しているものを従来の手法で扱うことができなかった。ここで示した平均化によってこの点を考慮できるように拡張した。
- 3)透水性の高い領域に透水性の低い介在物が内在する場合、ここでの平均化は下界値を与える。
- 4) 逆に, 透水性の低い領域に透水性の高い介在物内 在する場合, ここでの平均化は上界値を与える。
- 5) 平均透水係数を適切に評価できることで,実流速を 一般的に計算することができる。

参考文献

- Mura, T.: Micromechanics of Defects in Solids 2nd ed., Martinus Nijhoff Publ, 1987
- 2) 大南正瑛:マイクロメカニクス入門, オーム社, 1980.
- Hashin,Z and Shtrikman,S:A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials,J.Mech.Phys.Solids,Vol.11,1963
- Eshelby, J.D.: The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems, Proc. Roy. Soc. London, Vol.A241,1957
- Mori,T. and Tanaka,K.:Average stress in matrix and average energy of materials with misfitting inclusions,Act. Metall.,Vol.21,1973
- 6) 岩熊哲夫, 堀宗朗, 森勉, 村外志夫: 複合材料の平均的な硬化係数と延性の評価, 構造工学論文集, Vol.37A,1991
- 7) 佐武正雄(研究代表者):粒状体力学の構成に関する研究,昭和 56 年度文部省科学研究費総合研究 (B)No.56306023,昭和 57 年 3 月
- 8)仲沢武志:異物が介在する土質材料の平均的性質の評価法,フジタ技術研究報告,第37号,2001
- Oda,M.:Permeability tensor for discontinous rock masses,Geotechnique,Vol.35,No.4,1985
- 10) 大西,小林,塩田:二重間隙モデルを用いた地盤挙動 に関する考察,土木学会論文集,第394号/Ⅲ-9,1988
- 11) 京谷孝史,市川康明,川本朓万:岩盤の力学評価にお ける損傷テンソルの適用について、土木学会論文集, No.358/Ⅲ-3, 1987



ひとこと

微視構造を考慮した透水モデルを 力学系で発展している手法を用いて 展開した。理論というものはどの様 にリンクするかわからないことを今 さらながら認識しました。

仲沢 武志